

La (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments

Mohamed Sghiar

Université de Bourgogne Dijon, Faculté des sciences Mirande,
Département de mathématiques, 9 Av Alain Savary
21078 Dijon cedex, France

Abstract : In this article, by algebraic and geometrical techniques, I give a proof to the famous conjecture of Ulam [10] on the (-1)-reconstruction of the symmetric graphs with at least 3 elements conjectured in 1942, although was published only in 1960.

Résumé : Dans cet article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam [10] sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960.

Keywords: Graph, Ulam, Ulam's conjecture, isomorphism, reconstruction.

Code : 05C60, 05C62, 15A99, 15A03, 15A04, 53A99

Date of Submission: 22-05-2020

Date of Acceptance: 09-06-2020

I. Introduction

En 1977, Stockmeyer [9] a infirmé la conjecture Ulam-Kelly [9] et [3] sur la (-1)-reconstruction des tournois. Toutefois la (-1)-reconstruction a été démontré dans d'autre cas : citons par exemple la (-1)-reconstruction des arbres démontré par PJ Kelly [3] et la (-1)-reconstruction des tournois non fortement connexes [2] démontré par F.Harary et E Palmer (voir aussi [5] et [6]).

D'autres travaux remarquables et plus récents ont introduit l'algèbre dans la reconstruction des graphiques [4] (voir aussi [1]). Parmi les auteurs qui ont utilisé les outils algébriques, je cite M. Pouzet et N M. Thiéry [7].

Dans cette article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 [10].

II. Preuve de la conjecture d'Ulam

Théorème 1 [Conjecture d'Ulam [10]]

Soient G et H deux graphes symétriques sur une même base E de cardinal n au moins égal à 3.

Si G et H sont (-1)-hypomorphes (c'est à dire isomorphes sur toute partie à $n-1$ éléments), alors G et H sont isomorphes.

Proposition 1

Si G et H sont deux Graphes symétriques sur une base E de cardinal $n \geq 3$, de matrices respectives M et N et (-1)-hypomorphes, alors il existe une matrice A telle que : $N = AMA^t$ et $M = A^t N A$ si M et N sont dans un voisinage $V(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = \sup \{ |x_{i,j}|, i \neq j \}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

Posons $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j})$, O_n la matrice nulle, I_n la matrice identité, la matrice M_i est obtenue à partir de M en changeant $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ par 0 et en multipliant $m_{k,l}$ par $\frac{n-1}{n-2}$ si $k \neq l$ et $\{k,l\} \cap \{i\} = \emptyset$ sinon on multiplie $m_{k,k}$ par 1 si $k \neq i$.

L_i est la matrice obtenue à partir de I_n en changeant la colonne i par le vecteur nul.

Si σ est la matrice d'une permutation P_i sur $E \setminus \{e_i\}$ où $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, on définit σ la matrice de la permutation p prolongeant P_i sur E . Et on pose $\sigma_i = \sigma$.

On définit l'opérateur Δ_i par : $\Delta_i M = O_n$ Si M possède une colonne nulle C_j avec $j \neq i$, sinon $\Delta_i M = M$.

On définit l'opérateur Δ_i^t par : $M \Delta_i^t = O_n$ Si M possède une ligne nulle L_j avec $j \neq i$, sinon $M \Delta_i^t = M$.

Dans la suite M et N sont les matrices réelles des graphes G et H .

$$M = \sum_i \frac{1}{(n-1)} M_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} N_i$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} L_i N_i L_i^t$$

$$N = \sum_i \frac{1}{(n-1)} \sigma_i L_i M_i L_i^t \sigma_i^t$$

Donc :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i=j}} \frac{1}{n-1} \sigma_i L_i M_i L_j^t \sigma_j^t = N$$

Et on a :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) = N$$

De même on a :

$$\left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) N \left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i \right) = M$$

Posons : $\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i = \overline{A}$ et $\left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t \right) = \overline{B}$.

Alors $N = \overline{A} M \overline{A}^t$, $M = \overline{B} N \overline{B}^t$, $\overline{B}^t = \overline{A}$, $\overline{A}^t = \overline{B}$ et $(\overline{A} \overline{B})^t = \overline{A} \overline{B}$
Avec \overline{A} et \overline{B} sont deux opérateurs sur $M_n(\mathbb{R})$.

Or \overline{A} et \overline{B} sont linéaires au voisinage $V(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\| = \sup \{ |x_{i,j}|, i \neq j \}$ si $X = (x_{i,j})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Donc ils sont solutions de l'équation différentielle : $D_{I_n} U = U$

Sa résolution montre qu' il existe A et B de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\widetilde{A}X = AX$ et $\widetilde{B}X = BX$, $\forall X \in V(I_n) \cap M_n(\mathbb{R})$.

Et finalement on a : $N = AMA^t$ et $M = A^t NA$; $\forall M, N \in V(I_n) \cap M_n(\mathbb{R})$

Proposition 2 :

Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$ avec $\det(N) \neq 0$ et $(AB)^t = AB$ alors $AB = I_n$.

Preuve :

Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$, alors par récurrence on a : $N = (AB)^r N ((AB)^t)^r \quad \forall r \in \mathbb{N}$

Posons $X = AB$.

On a alors : $N = X^r N X^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$ et il s'ensuit que X et N commutent : $XN = NX$.

Mais comme $\det(N) \neq 0$, alors $\det(X) \neq 0$. Et comme X est symétrique, alors $X = P^t DP$ avec D diagonale et P orthogonale.

Donc $N = P^t D^r P N P^t D^r P$, $\forall r \in \mathbb{N}$

En posant $N = (n_{i,j})$, de l'égalité ci-dessus, on déduit que :

$n_{i,j} = \sum_{k_1, k_2} p_{i,j,k_1,k_2} \lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$, avec $p_{i,j,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^*$ (les λ_{k_i} sont des valeurs propres de la matrice D).

On en déduit que :

$\forall k, \lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = 1$ et $n_{i,j} = \sum_{k_1, k_2} p_{i,j,k_1,k_2} \lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r$, $\forall r \in \mathbb{R}$, avec $p_{i,j,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^*$

Et par suite : $N = X^r N X^r$, $\forall r \in \mathbb{R}$ avec $XN = NX$ et $\ln(X)N = N \ln(X)$.

Ψ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbb{R} &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ r &= N - X^r N X^r \end{aligned}$$

Comme $\Psi(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$, et $\ln(X)N = N \ln(X)$, alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -2 \ln(X) X^r N X^r = -2 N \ln(X) = O_n$$

Donc $\ln(X) = O_n$, soit $X = I_n$ (où $\ln(X)$ est le logarithme de X).

Preuve du Théorème :

On peut choisir G et H de la façon suivante :

$M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,i} = 1$ et $m_{i,j} = m_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}$ pour que $\det(M) \neq 0$.

$N = (n_{i,j})$ telle que $n_{i,i} = 1$ et $n_{i,j} = n_{j,i} \in \{0, \epsilon\}$ où $\epsilon \in \mathbb{R}$ pour que $\det(N) \neq 0$.

Ceci est possible par continuité de l'application déterminant et du fait que $\det(I_n) \neq 0$.

D'après la **proposition 1** il existe une matrice A telle que : $N = AMA^t$ et $M = A^t NA$ si ϵ est petit (car M et N seront dans un voisinage $V(I_n) \cap M_n(\mathbb{R})$ de I_n , et de la **proposition 2** on a $AA^t = I_n$, il en résulte que G et H sont isomorphes.

III. Conclusion

Pour parvenir à la preuve de cette célèbre conjecture d'Ulam [8, 10] sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques **finis** à au moins 3 éléments, conjecturée en 1942 quoique n'a été publiée que en 1960, il m'a fallu utiliser de l'algèbre et de la géométrie différentielle. Pour le cas **infini**, je renvoie le lecteur à la prépublication [8].

IV. Remerciements

Je tiens à remercier toute personne ayant contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

- [1]. P. J. Cameron. Stories from the age of reconstruction. Festschrift for C. St. J.A. Nash-Williams, 113:31-41, 1996.
- [2]. F. Haray and E. Palmer. On the problem of the reconstruction of a tournament from subtournaments. Mh. Math, 71:14-23, 1967.
- [3]. P. J. Kelly. A congruence theorem for trees. Pacific J. Math, 7:961-968, 1957.
- [4]. V. B. Mnukhin. The k-orbit reconstruction and the orbit algebra. Acta Appl. Math, 29(1-2):83-117, 1992.
- [5]. M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. Math. Zeitschrift, 150:117-134, 1976.
- [6]. M. Pouzet. Relations non reconstructible par leurs restrictions. Journal of combinatorial Theory, Series B), 26:22-34, 1979.
- [7]. M. Pouzet et N. M. Thiéry. Invariants algébriques de graphes et reconstruction. C. R. Acad. Sci. Paris), 333, Série I:821-826, 2001.
- [8]. M. Sghiar, Mesure et action des i-permutations sur les multigraphes multicolores finis et infinis, <https://arxiv.org/pdf/1506.08963v2.pdf>, Pages 1-41, 2015.
- [9]. P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. J. Graph Theory, 1:19-25, 1977.
- [10]. S. M. Ulam. A collection of mathematical problems, Interscience, New York}, 1960.