IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 13, Issue 6 Ver. III (Nov. - Dec. 2017), PP 48-50
www.iosrjournals.org

Découverte de la loi cachée pour les nombres premiers

M. Sghiar
9 Allée capitaine J.B. Bossu, 21240, Talant, France

Abstract: *From an idea inspired by quantum mechanics, the purpose of this article is to give a function* Φ *on* $\mathbb{N}^*$ *such that* $\Phi(n)$ *is the (n+1)-th prime number.*

Résumé *: En m'inspirant de la mécanique quantique, le but de cet article est de donner une fonction* Φ *sur* $\mathbb{N}^*$ *tel que* $\Phi(n)$ *est le (n+1)-ième nombre premier.*

Keywords: *Nombre premier, Théorie des nombres, distribution des nombres premiers, la loi des nombres premiers, l'hypothèse de Riemann, la fonction zêta de Riemann.*

Date of Submission: 24-11-2017 Date of acceptance: 11-12-2017

I. Introduction

Ah! les nombres premiers qui ont fasciné les hommes de tout temps ! On dit d'eux qu'ils sont insaisissables, ne respectent rien, n'ont aucune logique, aucune prédiction, qu'ils sont indisciplinés, ne se laissent enfermer dans aucune formule, échappent depuis l'antiquité aux plus brillants mathématiciens.... Ils sont pourtant l'ossature des nombres, le squelette autour duquel toute l'arithmétique peut être construite.

Et pour les contrôler, de nombreuses formules ont été cherchées pour générer les nombres premiers. Le plus haut niveau d'exigence serait de trouver une formule qui à un entier n associe le n-ième nombre premier. Ou au moins se contenter d'exiger une fonction f qui, à tout entier n, associe un nombre premier et telle que chaque valeur prise ne le soit qu'une fois.

Enfin, on souhaite que la fonction soit calculable en pratique (ce qui n'est pas le cas du Théorème de Mills [1]). Par exemple, le théorème de Wilson [2] assure que p est un nombre premier si et seulement si $(p-1)!\equiv-1 \bmod(p)$. Il s'ensuit que la fonction $f(n)=2+(2((n-1)!) mod(n))$ vaut 0 si n est un nombre premier et vaut 2 sinon. Cependant, le calcul de la factorielle (même modulo n) est rédhibitoire pour de grandes valeurs de n , et cette fonction a donc peu d'utilité pour générer des nombres premiers.

Rappelons que le Théorème de Mills [1] :"Il existe un nombre réel A, la constante de Mills, tel que, pour tout entier n > 0, la partie entière de A^{3^n} soit un nombre premier" a été démontré en 1947 par le mathématicien William H. Mills [1], en supposant que l'hypothèse de Riemann (démontré dans [3] et [4]) est vraie. Le Théorème de Mills [1] lui aussi a peu d'utilité pour générer des nombres premiers.

En parlant de l'hypothèse de Riemannn rappelons que la fonction ζ de Riemann (voir [3] et [6]) est une fonction analytique complexe qui est apparue essentiellement dans la théorie des nombres premiers. La position de ses zéros complexes est liée à la répartition des nombres premiers et se trouve au carrefour d'un grand nombre d'autres théories.

Hilbert et Pólya ont spéculé que les valeurs de t telle que $1/2+it$ soit un zéro de la fonction zêta de Riemann doivent être les valeurs propres d'un opérateur hermitien, et ceci serait une voie pour démontrer l'hypothèse de Riemann (voir [3] et [4] pour sa résolution).

À ce moment, c'était une petite base pour une telle spéculation. Néanmoins Selberg au début des années 1950 a démontré une dualité entre la longueur du spectre d'une surface de Riemann et les valeurs propres de son laplacien. Ceci, que l'on appelle la formule des traces de Selberg, avance une ressemblance frappante avec les formules explicites et donna une certaine crédibilité à la spéculation de Hilbert et Pólya.

Dans les années 70, Hugh Montgomery [6] rechercha et trouva que la distribution statistique des zéros sur la droite critique possède une certaine propriété. Les zéros ne tendent pas à être trop fermement ensemble, mais à se repousser. En visitant l'Institute for Advanced Study en 1972, il montra ce résultat à Freeman Dyson, un des fondateurs de la théorie des matrices aléatoires - qui sont très importantes en physique - se rendent compte que les états propres d'un hamiltonien, par exemple les niveaux d'énergie d'un noyau atomique, satisfont à de telles statistiques.

Dyson a vu que la distribution statistique trouvée par Montgomery était exactement la même que la distribution des paires de corrélations pour les valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire. Le travail postérieur a fortement élevé cette découverte, et la distribution des zéros de la fonction zêta de Riemann est maintenant reconnue pour satisfaire les mêmes statistiques que les valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire, les statistiques de ce que l'on appelle l'ensemble unitaire gaussien. Ainsi, la conjecture de Pólya et Hilbert possède maintenant une base plus solide.

Ce qui est frappant dans cette article c'est que si Hilbert et Pólya ont spéculé que les valeurs de t telle que 1/2+*it* soit un zéro de la fonction zêta de Riemann doivent être les valeurs propres d'un opérateur hermitien, j'ai montré ici que les nombres premiers sont liés aux racines d'un opérateur qu'on va découvrir (voir remarque 1).

Si dans [5], des techniques relativistes ont été utilisées pour démontrer de nombreuses conjectures en théorie des nombres, le but de cet article est de donner, en m'inspirant de la mécanique quantique, une fonction Φ qui donne pour tout entier naturel non nul, le n-ième nombre premier. L'idée est simple : il a fallu trouver le dit opérateur dont les nombres premiers sont liés à ses états propres (voir remarque 1).

Et si la plupart des mathématiciens s'accordaient auparavant à dire qu'il y a une part d'aléatoire dans l'apparition des nombres premiers, rappelons que Kannan Soundararajan et Robert Lemke Oliver, deux chercheurs à l'Université Stanford de Californie [7] ont constaté que l'apparition des nombres premiers n'a pas un caractère aléatoire.

Pour ce faire, les deux chercheurs se sont intéressés aux cent premiers millions de nombres premiers. Dans cet ensemble, un nombre premier qui se termine par un 1 est suivi par un autre se terminant par un 1 dans seulement 18,5% des cas. Ceci ne devrait pas arriver si nous étions en présence d'un véritable caractère aléatoire. Le résultat devrait être de 25% – car les nombres premiers se terminent nécessairement par 1, 3, 7 ou 9 -. Pour le 3, le pourcentage est de 30%, comme pour le 7. Pour le 9, il est de 22%. Et cela n'a rien à voir avec la notation en base 10, c'est bien inhérent aux nombres premiers.

Ainsi la découverte de la fonction Ψ apporte la preuve que les nombres premiers suivent bien une loi dans leur apparition et leur distribution n'est donc pas un fait du hasard.

II- Notations :

Soient les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \psi_n & : & \mathbb{Q}^n & \to & \mathbb{Q}^+ \\ & & (q_1,\cdots,q_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n-1}(q_i-q_{i+1})^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \phi_n & : & \mathbb{Q}^n & \to & \mathbb{Q}^n \\ & & \left(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right) & \mapsto & \left(\frac{1-p_1a_1}{b_1},\cdots,\frac{1-p_na_n}{b_n}\right) \end{array}$$

où $p_i,\ i\in\{1,\cdots,n\}$ sont les n premiers nombres premiers et $a_i\wedge b_i=1$.

Notons $\mathcal{P}_f(\mathbb{Q})$ l'ensemble des n-uplets finies et non vides d'éléments de $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathcal{P}_f(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q}^+ \\ & & (q_1,\cdots,q_n) & \mapsto & \psi_n((q_1,\cdots,q_n)) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathcal{P}_f(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q}^n \\ & & \left(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right) & \mapsto & \phi_n\left(\left(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right)\right)=\left(\frac{1-p_1a_1}{b_1},\cdots,\frac{1-p_na_n}{b_n}\right) \end{array}$$

Posons maintenant Φ l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ & & n & \mapsto & inf\left\{\sqrt{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\cap(p_n,+\infty)\ \text{tel que}\ \psi_n\phi_n(q)=0\ \text{ et }\sqrt{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\in\mathbb{N}\right\} \end{array}$$

Et posons $\hat{S}(1)=2$ et $\hat{S}(\Phi(n))=\Phi(n+1)\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ ($\hat{S}$: est appelée fonction de Spirale d'Ulam, ou fonction de Saut quantique).

III- Fonction génératrice des nombres premiers :

Théorème 1 , $\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ \Phi(n)$ *est le (n+1)-ième nombre premier.*

Proposition 1 (Théorème de Bézout)

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax+by=1$.

Proposition 2

Si $p_{n+1}=inf\{\sqrt[n]{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\cap]p_n,+\infty[\text{tel que}\ \psi_n\phi_n(q)=0\ \text{et}\ \sqrt[n]{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\in\mathbb{N}\}$, *alors*

p_{n+1} *est le plus petit nombre premier strictement plus grand que* p_n .

Preuve : Se déduit directement de la proposition **1.**

Corollaire 1 (Théorème 1)

$\forall\ n\in\mathbb{N}^*\ \Phi(n)$ *est le (n+1)-ième nombre premier.*

Remarque 1 *:*

- $\psi\phi(q)=0$ *est analogue à l'équation de Dirac en mécanique quantique relativiste de l'électron :* $\widehat{H\Phi=0}$.
- $\sqrt[n]{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\in\mathbb{N}$ *est analogue à la quantification des niveaux d'énergie de la fonction d'onde* ϕ *dans l'équation de Dirac :* $\widehat{H\Phi=0}$.
- *Ce qui est frappant dans cette article c'est que si Hilbert et Pólya ont spéculé que les valeurs de t telle que 1/2+it soit un zéro de la fonction zêta de Riemann doivent être les valeurs propres d'un opérateur hermitien, j'ai montré ici que les nombres premiers sont liés aux racines de l'opérateur* ψ *puisque j'ai montré que :*

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\exists\ q=q(n)\ \text{tel que}\ p_{n+1}=\sqrt[n]{\frac{1}{n}\phi_n(q).\phi_n(q)}\text{avec}\ \psi\phi(q)=\psi_n\phi_n(q)=0$$

Corollaire 2 (Saut quantique) *:*

$\hat{S}^{j-i}(\Phi(i))=\Phi(j)\forall\ (i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

En particulier : $\hat{S}^{n+1}(1)=\Phi(n+1)$ est le (n+1)-ième nombre premier $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

IV- Conclusion

Les nombres premiers sont définis par la fonction Φ , suivent bien une loi dans leur apparition et leur distribution n'est donc pas un fait du hasard.

Références

[1] . William H. Mills, Aprime representing finction, Bull. Amer. Math. Soc., 1947, p. 604 et 1196
[2] . Roshdi Rashed, Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Paris, 1984.
[3] . M. Sghiar, (Décembre 2015) , Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann, Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications , Volume 10, Numbers 1-2, 2015, Pages 1-31.
[4] . M. Sghiar, (Livre) Cinq preuves de l'Hypothèse de Riemann, Éditions Universitaires Européennes, ISBN-13 :978-3-639-54549-4
[5] . M. Sghiar, La relativité et la théorie des nombres , https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01174146v3
[6] . H.L. Montgomery – The pair correlation of zeros of the zeta function , Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 24, American Mathematical Society, 1973, p. 181–193.
[7] . Kannan Soundararajan et Robert Lemke Oliver, unexpected biases in the distribution of consecutive primes, arXiv:1603.03720v4 [math.NT] 30 May 2016