IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 13, Issue 1 Ver. III (Jan. - Feb. 2017), PP 39-41
www.iosrjournals.org

Persistance d'un nombre

M. Sghiar
9 Allée capitaine J. B. Bossu, 21240, France

Abstract: *For a radix of 10, I will show that there is no number with a multiplicative persistence* ≥ 12 .
Résumé: *Je démontre qu'en base 10, il n'existe aucun nombre dont la persistance multiplicative est supérieure ou égale à 12.*
Keywords: *Persistance, persistance multiplicative, théorie des nombres*

I. Introduction

la **persistance d'un nombre** [1,2,3,4 et 5] est le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre un point fixe, lorsqu'on effectue par itérations successives une série d'opérations à ce nombre.
Pour obtenir la persistance additive d'un nombre, le principe consiste à additionner les chiffres de ce nombre, puis à recommencer avec le résultat obtenu jusqu'à obtenir un nombre à un seul chiffre. Par exemple, pour le nombre 2718, on obtient : $2718 \rightarrow 18 \rightarrow 9$. Comme il faut 2 étapes pour obtenir un nombre à un chiffre, la persistance additive de 2718 est égale à 2. Le résultat final, 9 pour cet exemple, s'appelle la racine numérique additive (ou résidu) de 2718.
De même, on obtient la persistance multiplicative d'un nombre en multipliant ses chiffres entre eux, puis en recommençant avec le résultat obtenu jusqu'à obtenir un nombre à un seul chiffre. Par exemple, la persistance multiplicative de 39 est égale à 3, car il faut 3 étapes pour le réduire à un nombre à un chiffre : $39 \rightarrow 27 \rightarrow 14 \rightarrow 4$. Le résultat obtenu, ici 4, s'appelle la racine numérique multiplicative du nombre 39.
Actuellement, en base 10, on conjecture qu'il n'existe pas de nombre dont la persistance multiplicative est supérieure à 11.
Conjecture : En base 10, il n'existe pas de nombre dont la persistance multiplicative est supérieure ou égale à 12.
Le but de cet article est de démontrer cette conjecture ouverte il y'a plus de 36 ans.

II. Idée De La Preuve

Je considère les nombres comme des particules, et après avoir introduit deux fonctions ϕ et ψ agissantes sur les particules, je vais démontrer par un simple calcul la conjecture de la persistance des nombres.

III. Notations

En base 10, si $n=\sum_{i=0}^{l} a_i 10^i$, alors on pose : $\phi(n)=\prod_{i=0}^{l} a_i$.

Et on pose : $\psi(x)=\prod_{i=0}^{9}(x-i)$ et $[\![n,m]\!]=\{x\in\mathbb{N} \;/\; n\leqslant x\leqslant m\}$

IV. Preuve De La Conjecture De La Persistance Multiplicative

Théorème: En base 10, il n'existe pas de nombre dont la persistance multiplicative est supérieure ou égale à 12.
Pour la preuve de ce Théorème, on aura besoin des résultats suivants :

Lemme 1 :
Si $\alpha>1$ et $\phi(n)\neq 0$, alors :

$$n-\phi(n)>\frac{n}{\alpha}\Leftrightarrow(\alpha-1)n>\alpha\phi(n)\Leftrightarrow n>\frac{\alpha}{\alpha-1}\phi(n)\Leftrightarrow\alpha>\frac{x}{x-1} \text{ où } x=\frac{n}{\phi(n)}$$

Corollaire 1 : Il existe un plus grand entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\phi^k(n)<n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k$ si $\alpha>\frac{x}{x-1}$ où $x=\frac{n}{\phi(n)}$

Preuve : se déduit du lemme 1 par itération sur k

Corollaire 2 :

si $\alpha > \frac{x}{x-1}$ où $x = \frac{n}{\phi(n)}$, $\phi^k(n) < n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k$, et si $\psi(\phi^k(n)) \neq 0$ alors :

$$k < \frac{\ln\left(\frac{\phi^k(n)}{n}\right)}{\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}$$

Corollaire 3 :

Si $\beta > 0$, $\alpha > \frac{x}{x-1}$ où $x = \frac{n}{\phi(n)}$, $\phi^k(n) < n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k$, et si $\psi(\phi^k(n)) \neq 0$ alors : $\frac{\ln\left(\frac{\phi^k(n)}{n}\right)}{\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)} < \beta \Leftrightarrow \frac{n}{\phi^k(n)} < \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\beta$

Lemme 2 : Si $\beta > 0$, $\alpha > 1$ et $\psi(\phi^k(n)) \neq 0$, alors :

$$\frac{n}{\phi^k(n)} < \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\beta \Leftrightarrow \alpha < \frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{1}{\beta}}-1} \text{ où } x = \frac{n}{\phi^k(n)}$$

Lemme 3 :

Si $\beta > 0$ alors : $\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{1}{\beta}}-1}$ est décroissante dans $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$.

Corollaire 4 :

Si α est tel que $\alpha < \frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{1}{\beta}}-1}$ où $x = \frac{n}{\phi^k(n)}$ et $\psi(\phi^k(n)) \neq 0$.

alors on a $k < \beta$ si $\alpha > \frac{x}{x-1}$ où $x = \frac{n}{\phi(n)}$.

Preuve : Se déduit du corollaire 2, du corollaire 3, et des lemmes 2 et 3.

Corollaire 5 : Si $n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k \leq 9$, alors , $\phi^k(n) \leq 9$

Preuve : se déduit du corollaire 1

Corollaire 6 :

$$n\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^k \leq 9 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{1-\left(\frac{9}{n}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Lemme 4:

Soit s un entier non nul et k et β des entiers tels que $3 \leq k < \beta$.

Si $x=\frac{n}{\phi^k(n)}$, et $s=\phi(n)$, alors : $\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{1}{\beta}}-1}\geq\frac{1}{1-\left(\frac{9}{n}\right)^{\frac{1}{k}}}\geq\frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s}-1}$ pour n assez grand. Plus précisément, on a l'inégalité gauche à partir de 9^{12} indépendamment de k et de β, et l'inégalité de droite est obtenue à partir de $s^{\frac{k}{k-1}}$.

On a donc l'inégalité à partir de $(9^{12})^{\left(\frac{3}{2}\right)}$

Preuve : Facile à voir.

Preuve de la conjecture :

Fixons s un entier non nul et utilisons les notations du lemme 4.

Si $n\geq(9^{12})^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ alors $\frac{x^{\frac{1}{\beta}}}{x^{\frac{1}{\beta}}-1}\geq\frac{1}{1-\left(\frac{9}{n}\right)^{\frac{1}{k}}}\geq\frac{\frac{n}{s}}{\frac{n}{s}-1}$ d'après le lemme 4, du corollaire 4 et du lemme 4, on déduit l'existence de α convenable avec $k=11$ de tel façon que des corollaires 5 et 6 et du lemme 4, on a $\phi^k(n)\leq 9$.

Si $n\leq(9^{12})^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ alors $\phi^{11}(n)\leq 9$. (Testé sur ordinateur). D'où le résultat.

Remarque : 277777788888899 est le plus petit nombre nombre de persistance multiplicative 11, et on a bien 277777788888899 < $(9^{12})^{\left(\frac{3}{2}\right)}$

V. Conclusion

En base 10, il n'existe aucun nombre dont la persistance multiplicative est supérieure ou égale à 12.

Références

[1]. http://mathworld.wolfram.com/MultiplicativePersistence.html

[2]. *Guy, Richard K. (2004). Unsolved problems in number theory (3rd ed.). Springer-Verlag. pp. 398–399. ISBN 978-0-387-20860-2. Zbl 1058.11001.*

[3]. *Meimaris, Antonios (2015). On the additive persistence of a number in base p. Preprint.*

[4]. *https://en.wikipedia.org/wiki/Persistence_of_a_number*

[5]. *Jean-Paul Delahaye http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/2013/237.pdf*