IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 12, Issue 6 Ver. II (Nov. - Dec.2016), PP 22-25
www.iosrjournals.org

Sur Le 16-Problème D' Hilbert

M. Sghiar
9 allée capitaine J. B. Bossu, 21240, Talant, France

Abstract: *On the 16-hilbert problem, I will give an upper bound for the number of limit cycles in two-dimensional polynomial vector fields of degree d, and I show a link between the two parts of the 16-hilbert problem.*
Résumé: *Sur le 16-problème d'Hilbert, je donne une majoration du nombre des cycles limites pour une équation différentielle polynomiale plane de degré d, et je montre un lien entres les deux parties du 16 problème d'hilbert.*

I.Introduction

Le 16-problème de Hilbert, mise à part l'hypothèse de Riemann que j'ai démontré dans [M. Sghiar, 2015], il semble que ce soit le plus insaisissable des problèmes de Hilbert : Il comporte deux parties : La première concerne le nombre de branches réelles (ovales) d'une courbe algébrique , et leur disposition ; de nombreux résultats modernes (Petrovskii) apportent des informations à leur sujet. La seconde partie du problème pose la question du nombre maximal et de la position mutuelle des cycles limites de Poincaré (orbites périodiques isolées) pour une équation différentielle polynomiale plane de degré donné ; cette question est encore ouverte. La première partie de 16-probème d'Hilbert est étudié par les chercheurs dans le domaine de la géométrie algébrique quant à la seconde partie elle intéresse surtout les chercheurs dans les domaines de la système dynamique et des équations différentielles. Hilbert a constaté qu'il y a un possible lien entre les deux parties du problème. D'autres connexions entres les deux parties ont été décris par par Jibin Li, see [Jibin Li].

Il s'en suit que lorsqu'on parle dans la suite du 16-probème d'Hilbert, on sous entend la deuxième partie du problème :

Soit l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x,y)$$

où P et Q sont des polynômes. Existe-t-il une borne K pour le nombre de cycles limites, de la forme $K \leqslant d^q$ *, où d est le maximum des degrés de P et Q, et q est une constante universelle .*
C'est une version moderne de la seconde moitié du seizième problème de Hilbert.

En fait, depuis un article de Petrovskii et Landis (1957) prétendant donner une solution positive, les progrès semblent aller à reculons. Un peu plus tôt, Dulac (1923) affirmait que le système ci-dessus a toujours un nombre fini de cycles limites. Après qu'un trou fût trouvé dans Petrovskii-Landis (voir [Petrovskii- Landis, 1959]), Ilyashenko (1985) a trouvé une erreur dans l'article de Dulac.
Puis Shi Songling (1982) a trouvé un contre-exemple aux bornes spécifiques de Petrovskii-Landis pour le cas d = 2. Ensuite, deux longs travaux ont été publiés, indépendamment, démontrant les affirmations de Dulac [Écalle, 1992] et [Ilyashenko, 1991].
Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration.

Idée principale :

Après avoir résolu l'équation de Navier-Stokes [M. Sghiar (October 2016)], je me suis intéressé à résoudre la deuxième partie du 16-Problème d'Hilbert. En contemplant les cycles limites et le champs de vecteurs au voisinage de ces cycles limites, j'ai pensé à la conservation de l'énergie cinétique des particules empruntant ces chemins-cycles limites, mais cette voie était sans issue et ne m'a pas permis de résoudre le problème d'Hilbert. En plus, je me disais que si l'énergie cinétique étais constante, les forces exercées sur les particules dans les cycles limites doivent êtres nulles, et par suite les trajectoires doivent être rectilignes alors que les cycles limites sont fermés !. Plus tard, je me suis aperçu qu' il ne faut pas tenir compte que de l'énergie cinétique, mais de l'énergie potentielle aussi. Or la conservation de l'énergie total (cinétique et potentielle) laisse penser à l'oscillateur harmonique, et pour ces derniers, la vitesse peut varier en fonction du temps, voir même qu'il peut s'annuler.

Le fait que la vitesse puisse s'annuler m'a fait penser au théorème de Michel Rolle (Découvert auparavant par l'indien Bhaskara) qu'on va utiliser ici pour résoudre le 16-Problème d'Hilbert.

I- Premier partie :

Théorème :

Soit l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y)$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y)$$

Où P et Q sont des polynômes. Il existe une borne K pour le nombre de cycles limites, de la forme $K \leqslant d^2$, où d est le maximum des degrés de P et Q.

Théorème (Michel Rolle et Bhaskara)[1]:

Si f est une fonction réelle continue sur l'intervalle [*a*, *b*], différentiable sur]a,b[avec *f*(*a*) = *f*(*b*), alors il existe c dans]a,b[tel que f'(c)=0.

Preuve du théorème :

Supposons qu'il existe des cycles limites $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$, une suite de cycles limites, et que chaque cycle limite C_i dure entre t_i^b et t_i^e . (b pour begin et e pour end.)

Posons :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$$

En appliquant le théorème de Rolle-Bhaskara ci-dessus aux fonctions ψ_1 et ψ_2 , on aura :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x(n_i), y(n_i)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x(p_i), y(p_i)) = 0 \quad \text{où} \quad n_i, p_i \in [t_i^b, t_i^e]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x(q_i), y(q_i)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x(r_i), y(r_i)) = 0 \quad \text{où} \quad q_i, r_i \in [t_i^b, t_i^e]$$

Il s'en suit, en séparant les intervalles de périodicité, que si le nombre des cycles limites C_i est strictement supérieur à $\frac{(d-1)d+2}{2}$ alors on a au moins $\frac{(d-1)d}{2}+2$ zéros et on peut appliquer le théorème de Rolle-Bhaskara jusqu'à l'ordre $\frac{(d-1)d}{2}+1$.

Or $d \leq \frac{(d-1)d}{2}+1$ pour $d \geq 1$, donc en réitérant l'utilisation du théorème de Rolle-Bhaskara ci-dessus, on aura :

$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial^i x \partial^j y}(x(p), y(p)) = 0$ pour une valeur p avec $i + j = d$, et

1 Le mathématicien Indien Bhaskara II (1114–1185) est reconnu le premier ayant trouvé le théorème de Rolle : R.C. Gupta, *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Westen Cultures*, p.156

$$\frac{\partial^{i+j} Q}{\partial^i x \partial^j y}(x(q), y(q)) = 0$$ pour une valeur q avec $i + j = d$.

Or si d est égal au sup(deg(P), deg(Q)), alors :

En posant :
$P(X,Y) = \sum_{i,j; i+j<d} p_{i,j} X^i Y^j + \sum_{i+j=d} p_{i,j} X^i Y^j$ et $Q(X,Y) = \sum_{i,j; i+j<d} q_{i,j} X^i Y^j + \sum_{i,j; i+j=d} q_{i,j} X^i Y^j$ avec les $p_{i,j}$ ou $q_{i,j}$ non nuls.
On aura :
Soit :

$$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial^i x \partial^j y}(x(p), y(p)) = i!\, j!\, p_{i,j} \neq 0$$

Soit :

$$\frac{\partial^{i+j} Q}{\partial^i x \partial^j y}(x(q), y(q)) = i!\, j!\, q_{i,j} \neq 0$$

Ce qui est absurde.

Partie II :
Cette partie montre le lien entre les deux parties du 16-problème d'Hilbert :
Une courbe algébrique réelle plane est une courbe du plan $\mathbb{R}^2$ définie par une équation de la forme $P(x;y) = 0$ où $P(x;y)$ est un polynôme à coefficients réels. Les courbes algébriques réelles de degré 1 et 2 sont simples et bien connues, ce sont les droites et les coniques. À mesure que le degré de P(x; y) augmente, le dessin réalisé par la courbe d'équation $P(x;y) = 0$ peut être de plus en plus complexe.

Pour se ramener au problème de la première partie :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Donc : $$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = 0$$
(Produit scalaire de deux vecteurs)

A un scalaire près, on se ramène à étudier le système :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

De la première partie, on déduit qu'une courbe algébrique a un nombre fini de composantes connexes fermées et que ce nombre est majoré par : $\frac{(d-1)d+2}{2}$

où d est le maximum des degrés de $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial x}$.

Références

[1]. **[Dulac, H.]** (1923). Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. France 51, 45–188.

[2]. **[Écalle, J.]** (1992). Introduction aux Fonctions Analysables and Preuve Constructive de la Conjecture de Dulac. Hermann, Paris.

[3]. **[Ilyashenko, J.]**, (1985). Dulac's memoir « On limit cycles » and related problems of the local theory of differential equations. Russian Math. Surveys VHO, 1–49.

[4]. **[Ilyashenko, Yu.]**, (1991). Finiteness Theorems for Limit Cycles, American Math Society, Providence, RI.

[5]. **[J. Li]**, Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13 (2003), 47–106.

[6]. **[Petrovskii, I.G. and Landis]**, E.M., (1959). Corrections to the articles « On the number of limit cycles of the equation dy/dx = P (x, y)/Q(x, y), where P and Q are polynomials ». Mat. Sb. N.S. 48 (90), 255–263 (in Russian)

[7]. **[Petrovskii, I.G. and Landis]**, E.M., (1957). On the number of limit cycles of the equation dy/dx = P (x, y)/Q(x, y), where P and Q are polynomials. Mat. Sb. N.S. 43 (85), 149–168 (in Russian), and (1960) Amer. Math. Soc. Transl. (2) 14, 181–200.

[8]. **[M. Sghiar]**, (October 2016), Turbulent functions and solving the navier-stokes equation by fourier series, (IJEAT), ISSN: 2249-8958 (Online), Volume-6 Issue-1, Page No.: 79-80, October 2016.

[9]. **[M. Sghiar]** (Décembre 2015) , Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann, Pioneer Journal of Algebra, Number Theory and its Applications Volume 10, Numbers 1-2, 2015, Pages 1-31.

[10]. **[Shi, S.]**, (1982). On limit cycles of plane quadratic systems. Sci. Sin. 25, 41–50.