IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 12, Issue 5 Ver. III (Sep. - Oct.2016), PP 77-79
www.iosrjournals.org

La preuve de la conjecture d'Ulam.

M. Sghiar
9 Allée capitaine J.B. Bossu, 21240, Talant, France.

Absract *: I give in this article one proof to the famous conjecture of Ulam about the (-1)-reconstruction of the symmetrical graphs.*
Résumé *: Je donne dans cet article une preuve à la célèbre conjecture d' Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques.*

I. Introduction

En 1977, Stockmeyer [11] a infirmé la conjecture Ulam-Kelly [12] et [5] sur la (-1)-reconstruction des tournois. Et depuis 1942, quoique n'a été publié que en 1960, la célèbre conjecture est toujours ouverte pour les graphes symétriques et justifie de nombreux travaux et résultats : citons par exemple la (-1) -reconstruction des arbres démontré par PJ Kelly [5] et la (-1) -reconstruction des tournois non fortement connexes [2] démontré par F. Harary et E Palmer (voir aussi [8] et [9]) . D'autres travaux remarquables et plus récents ont introduit l'algèbre dans la reconstruction des graphiques [7] (voir aussi [1]). Parmi les auteurs qui ont utilisé les outils algébriques, je cite M. Pouzet et N M. Thiéry [6] . Rappelons que dans [3], J. Fisher a donné des contre-exemples à la (-1)- reconstruction des graphes symétriques infinis.

Dans cette note, je vais donner une preuve à la conjecture d' Ulam sur la (-1) -reconstruction des graphes symétriques finis en introduisant la notion de mesure sur les graphes et en assimilant les points de la base d'un graphe à des particules sur lesquels agissent des forces partielles -représentées par la i-permutation-préservant les mesures et qui vont être déduites d'une force agissant sur les particules par permutation. Dans le théorème 1.1 je démontre que toute i-permutation sur E (c.a.d une permutation sur les parties à i éléments de E) est déduite de l'action d'une permutation sur les éléments de E. Puis, je donne dans le théorème 1.2 une application des i-permutations dans la preuve de la conjecture d'Ulam [4] et [12].
Ce travail est une section de l'article [10].

Notations et définitions :

Soit ω_j^i le type d'un graphe de cardinal i (à un isomorphe près).

A tout ω_j^i associons un nombre μ_j^i, de tels façon que $\mu_j^i = \mu_l^k \Leftrightarrow i = k \text{ et } j = l$

Pour tout graphe G de base E, la mesure μ_G ou μ est la fonction définie sur les parties de E par : $\mu(X) = \mu_j^i$ si G/X est isomorphe à ω_j^i. μ_j^i est dite la mesure de X .

Une i-permutation σ_i sur un ensemble E est une permutation sur les parties à i éléments de E.

Une i-permutation σ_i sur les parties de E à i éléments est dite déduite d'une permutation σ sur E si : $\sigma_i X = \sigma X, \forall\ X \subseteq E$.

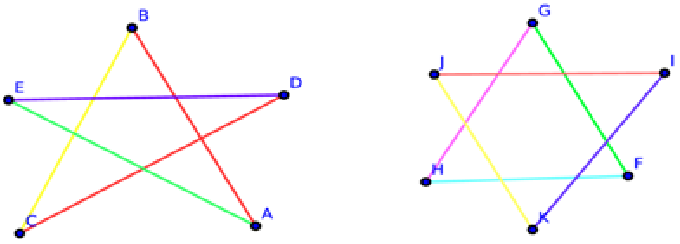
Si G et G' sont deux graphes sur un même ensemble E, une (n-1)-permutation entre les parties à $n-1$ éléments est dite préservant les mesures μ_i^{n-1} si $\mu_G(X) = \mu_i^{n-1} \Leftrightarrow \mu_{G'}(\sigma_{n-1}(X)) = \mu_i^{n-1}\ \forall\ X \subseteq E$.

Un graphe est dit bicolore si $\operatorname{card}\{\mu(X); X \subseteq E \ / \ |X| = 2\} \leqslant 2$ et $\operatorname{card}\{\mu(X); X \subseteq E \ / \ |X| = 1\} = 1$.

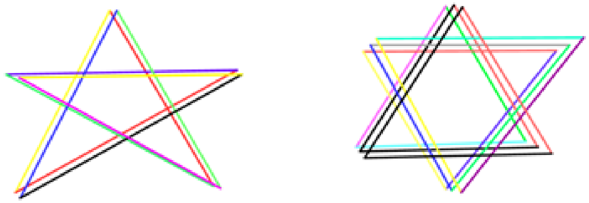
Un graphe est dit multicolore si $\operatorname{card}\{\mu(X); X \subseteq E \ / \ |X| = 2\} \geqslant 2$ et $\operatorname{card}\{\mu(X); X \subseteq E \ / \ |X| = 1\} = 1$

Un multigraphe multicolore $(G_1, \ldots, G_k)$ est un ensemble de k graphes multicolores sur une même base E.

Exemple de Graphes et de multigraphes multicolores :



Deux Graphes multicolores



Deux multigraphes multicolores

1. Cas où les graphes sont bicolores :
1.1 Action des i-permutations sur un ensemble E.

Théorème 1.1 (Voir [10]) :
Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 3$.
Toute $(n-1)$- permutation σ_{n-1} sur les parties de E à $n-1$ éléments est déduite d'une permutation σ sur les éléments de E :
c'est à dire : $\sigma_{n-1} X = \sigma X, \forall \ X \subseteq E \ / \ |X| = n-1$
Et σ vérifie : $\sigma(A \cap B) = \sigma_{n-1}(A) \cap \sigma_{n-1}(B)$ si $|A| = |B| = n-1$.
On en déduit que : $\sigma(x_i) = \bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} \sigma_{n-1}(E \setminus \{x_j\}) \forall \ x_i \in E.$

Théorème 1.2 [Conjecture d'Ulam] [12]
Soit G et G' deux graphes sur une même base E de cardinal au moins égal à 3.
Si G et G' sont (-1)-hypomorphes, alors G et G' sont isomorphes .

Preuve :
On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration utilise le Théorème 1.1:
Lemme 1.1.
Soit G et G' deux graphes multicolores sur un même ensemble E à au moins 3 éléments.
Si σ_{n-1} est une (n-1)-permutation sur les parties à $n-1$ éléments et préservant les mesures μ_i^2 sur les parties à $n-1$ éléments, alors σ_{n-1} est déduite d'une permutation $\tilde{\sigma}$ avec $\tilde{\sigma}\tau$ préservant elle aussi les mesures μ_i^2 où τ est une permutation sur les éléments de E.
Et à une représentation près des graphes G et G', $\sigma_{n-1}\tau$ sera déduite de $\tilde{\sigma}\tau$ avec $\tilde{\sigma}\tau$ préservant les mesures.

Preuve du Théorème 1.2
Preuve . (Valable même pour les graphes multicolores)
En utilisant le lemme 1.1 on trouve une permutation σ préservant les mesures μ_i^2 ,donc $G(x,z) = G'(\sigma(x), \sigma(z))$ pour tout couple d' éléments x et z de E. D'où le résultat.

1.2 Généralisation de la conjecture d'Ulam :

Théorème 1.3

Soit G et G' deux graphes sur une même base E de cardinal au moins égal à 3.

Si $\forall \ j$ G et G' abritent le même nombre de parties de mesure μ_j^{n-1} alors G et G' sont isomorphes .

Preuve :

Des hypothèses il existe une (n-1)-permutation σ_{n-1} préservant les mesures μ_j^{n-1} .

Il s'en suit que G et G' seront (-1)-hypomorphes, Et le résultat se déduit directement du Théorème 1.2.

Référence bibliographique

[1]. P. J. Cameron. Stories from the age of reconstruction. Z*estschrift for C. St. J.A. Nash-Williams*, 113:31–41, 1996.

[2]. F. Haray and E. Palmer. On the problem of the reconstruction of a tournament from subtournaments. *Mh. Math*, 71:14–23, 1967.

[3]. J. Fisher. A counterexample to the countable version of a conjecture of ulam. *Journal of combinatorial theory*, 7:364–365, 1969.

[4]. Bondy J.A. and R.L. Hemminger. Graph reconstruction. *J. Graph Theory1*, pages 227–268, 1977.

[5]. P. J. Kelly. A congruence theorem for trees. *Pacific J. Math*, 7:961–968, 1957.

[6]. M. Pouzet et N. M. Thiéry. Invariants algébriques de graphes et reconstruction. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 333, Série I:821–826, 2001.

[7]. V. B. Mnukhin. The k-orbit reconstruction and the orbit algebra. *Acta Appl. Math*, 29(1-2):83–117, 1992.

[8]. M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. *Math. Zeitschrift*, 150:117–134, 1976.

[9]. M. Pouzet. Relations non reconstructible par leurs restrictions. *Journal of combinatorial Theory, Series B*, 26:22–34, 1979.

[10]. M. Sghiar. Mesure et action des i-permutation sur les multigraphes multicolores finis et infinis. pages 1–41, 2015. déposé au arXiv : Réf :1506.08963v2 Math GM et au HAL: Réf : hal-01080405.

[11]. P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. *J. Graph Theory*, 1:19–25, 1977.

[12]. S. M. Ulam. " a collection of mathematical problems,". *Interscience, New York*, 1960.