IOSR Journal of Computer Engineering (IOSR-JCE)
e-ISSN: 2278-0661,p-ISSN: 2278-8727, Volume 22, Issue 3, Ser. III (May - June 2020), PP 13-16
www.iosrjournals.org

La (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments

Mohamed Sghiar
Université de bourgogne Dijon, Faculté des sciences Mirande,
Département de mathématiques, 9 Av Alain Savary
21078 Dijon cedex , France

Abstract *: In this article, by algebraic and geometrical techniques, I give a proof to the famous conjecture of Ulam [10] on the (-1)-reconstruction of the symmetric graphs with at least 3 elements conjectured in 1942, although was published only in 1960.*

Résumé*: Dans cet article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam [10] sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 .*

Keywords*: Graph, Ulam, Ulam's conjecture, isomorphism, reconstruction.*
Code *: 05C60, 05C62, 15AXX, 15A03, 15A04, 53AXX*

Date of Submission: 22-05-2020 Date of Acceptance: 09-06-2020

I. Introduction

En 1977, Stockmeyer [9] a infirmé la conjecture Ulam-Kelly [9] et [3] sur la (-1)-reconstruction des tournois. Toutefois la (-1)-reconstruction a été démontré dans d'autre cas : citons par exemple la (-1)-reconstruction des arbres démontré par PJ Kelly [3] et la (-1)-reconstruction des tournois non fortement connexes [2] démontré par F.Harary et E Palmer (voir aussi [5] et [6]).

D'autres travaux remarquables et plus récents ont introduit l'algèbre dans la reconstruction des graphiques [4] (voir aussi [1]). Parmi les auteurs qui ont utilisé les outils algébriques, je cite M. Pouzet et N M. Thiéry [7].

Dans cette article, par des techniques algébriques et géométriques, je donne une preuve à la célèbre conjecture d'Ulam sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments conjecturé en 1942, quoique n'a été publié que en 1960 [10].

II. Preuve de la conjecture d'Ulam

Théorème 1 [Conjecture d'Ulam [10]]
Soient G et H deux graphes symétriques sur une même base E de cardinal n au moins égal à 3.
Si G et H sont (-1)-hypomorphes (c'est à dire isomorphes sur toute partie à $n-1$ éléments), alors G et H sont isomorphes .

Proposition 1
Si G et H sont deux Graphes symétriques sur une base E de cardinal $n\geq 3$, de matrices respectives M et N et (-1)-hypomorphes , alors il existe une matrice A telle que : $N=AMA^t$ et $M=A^tNA$ si M et N sont dans un voisinage $V(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\|=\sup\{|x_{i,j}|, i\neq j\}$ si $X=(x_{i,j})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Preuve :
Posons $M=(m_{i,j})$, $N=(n_{i,j})$, O_n la matrice nulle, I_n la matrice identité, la matrice M_i est obtenue à partir de M en changeant $m_{i,j}$ et $m_{j,i}$ par 0 et en **multipliant** $m_{k,l}$ par $\frac{n-1}{n-2}$ si $k\neq l$ et $\{k,l\}\cap\{i\}=\emptyset$ sinon on multiplie $m_{k,k}$ par 1 si $k\neq i$.

L_i est la matrice obtenue à partir de I_n en changeant la colonne i par le vecteur nul.

Si σ est la matrice d'une permutation p_i sur $E\backslash\{e_i\}$ où $E=\{e_1,\dots,e_n\}$, on définit $\widetilde{\sigma}$ la matrice de la permutation p prolongeant p_i sur E. Et on pose $\sigma_i=\widetilde{\sigma}$.

On définit l'opérateur Δ_i par : $\Delta_i M=O_n$ Si M possède une colonne nulle C_j avec $j\neq i$, sinon $\Delta_i M=M$.

On définit l'opérateur Δ_i^t par : $M\Delta_i^t=O_n$ Si M possède une ligne nulle L_j avec $j\neq i$, sinon $M\Delta_i^t=M$.

Dans la suite M et N sont les matrices réelles des graphes G et H.

$$M=\sum_i \frac{1}{(n-1)} M_i$$

$$N=\sum_i \frac{1}{(n-1)} N_i$$

$$N=\sum_i \frac{1}{(n-1)} L_i N_i L_i^t$$

$$N=\sum_i \frac{1}{(n-1)} \sigma_i L_i M_i L_i^t \sigma_i^t$$

Donc :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i\right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right)=\sum_{\substack{i,j\\ i=j}} \frac{1}{n-1}\sigma_i L_i M_i L_j^t \sigma_j^t=N$$

Et on a :

$$\left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i\right) M \left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right)=N$$

De même on a :

$$\left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right) N \left(\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i\right)=M$$

Posons : $\sum_i \sigma_i L_i \Delta_i=\widetilde{A}$ et $\left(\sum_i \Delta_i^t L_i^t \sigma_i^t\right)=\widetilde{B}$.

Alors $N=\widetilde{AM A^t}$, $M=\widetilde{BN B^t}$, $\widetilde{B^t}=\widetilde{A}$, $\widetilde{A^t}=\widetilde{B}$ et $(\widetilde{AB})^t=\widetilde{AB}$

Avec $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont deux opérateurs sur $M_n(\mathbb{R})$.

Or $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont linéaires au voisinage $V(I_n)$ de I_n pour la norme $\|X\|=\sup\{|x_{i,j}|, i\neq j\}$ si $X=(x_{i,j})$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Donc ils sont solutions de l'équation différentielle : $D_{I_n} U = U$

Sa résolution montre qu' il existe A et B de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\widetilde{A}X = AX$ et $\widetilde{B}X = BX$, $\forall\ X \in V(I_n) \cap M_n(\mathbb{R})$.

Et finalement on a : $N = AMA^t$ et $M = A^t NA$; $\forall\ M,\ N \in V(I_n) \cap M_n(\mathbb{R})$

Proposition 2 :

Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$ avec $det(N) \neq 0$ et $(AB)^t = AB$ alors $AB = I_n$.

Preuve :

Si $M = BNB^t$, $N = AMA^t$, alors par récurrence on a : $N = (AB)^r N((AB)^t)^r \quad \forall\ r \in \mathbb{N}$

Posons X=AB.

On a alors : $N = X^r N X^r ,\ \forall\ r \in \mathbb{N}$ et il s'ensuit que X et N commutent : $XN = NX$.
Mais comme $det(N) \neq 0$, alors $det(X) \neq 0$. Et comme X est symétrique, alors $X = P^t DP$ avec D diagonale et P orthogonale.

Donc $N = P^t D^r PNP^t D^r P ,\ \forall\ r \in \mathbb{N}$

En posant $N = (n_{i,j})$, de l'égalité ci-dessus, on déduit que :

$n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2} p_{i,j,k_1,k_2} \lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r ,\ \forall\ r \in \mathbb{N}, \text{avec}\ p_{i,j,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^*$ (les λ_{k_i} sont des valeurs propres de la matrice D).

On en déduit que :
$\forall\ k, \lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = 1$ et $n_{i,j} = \sum_{k_1,k_2} p_{i,j,k_1,k_2} \lambda_{k_1}^r \lambda_{k_2}^r ,\ \forall\ r \in \mathbb{R}, \text{avec}\ p_{i,j,k_1,k_2} \in \mathbb{R}^*$

Et par suite : $N = X^r N X^r ,\ \forall\ r \in \mathbb{R}$ avec $XN = NX$ et $\ln(X) N = N \ln(X)$.

ψ l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} \psi: & \mathbb{R} & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & r & = & N - X^r N X^r \end{array}$$

Comme $\psi(r) = 0 \quad \forall\ r \in \mathbb{R}$, et $\ln(X) N = Nln(X)$, alors :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2 \ln(X) X^r N X^r = -2 Nln(X) = O_n$$

Donc $\ln(X) = O_n$, soit $X = I_n$ (où ln(X) est le logarithme de X).

Preuve du Théorème :

On peut choisir G et H de la façon suivante :

$M=(m_{i,j})$ telle que $m_{i,i}=1$ et $m_{i,j}=m_{j,i}\in\{0,\epsilon\}$ où $\epsilon\in\mathbb{R}$ pour que $det(M)\neq 0$.

$N=(n_{i,j})$ telle que $n_{i,i}=1$ et $n_{i,j}=n_{j,i}\in\{0,\epsilon\}$ où $\epsilon\in\mathbb{R}$ pour que $det(N)\neq 0$.

Ceci est possible par continuité de l'application déterminant et du fait que $det(I_n)\neq 0$.

D'après la **proposition 1** il existe une matrice A telle que : $N=AMA^t$ et $M=A^t NA$ si ϵ est petit (car M et N seront dans un voisinage $V(I_n)\cap M_n(\mathbb{R})$ de I_n , et de **la proposition 2** on a $AA^t=I_n$, il en résulte que G et H sont isomorphes.

III. Conclusion

Pour parvenir à la preuve de cette célèbre conjecture d'Ulam [8, 10] sur la (-1)-reconstruction des graphes symétriques **finis** à au moins 3 éléments, conjecturée en 1942 quoique n'a été publiée que en 1960 , il m'a fallu utiliser de l'algèbre et de la géométrie différentielle. Pour le cas **infini**, je renvoie le lecteur à la prépublication [8] .

IV. Remerciements

Je tiens à remercier toute personne ayant contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

[1]. P. J. Cameron. Stories from the age of reconstruction. Festschrift for C. St. J.A. Nash-Williams, 113:31-41, 1996.

[2]. F. Harary and E. Palmer. On the problem of the reconstruction of a tournament from subtournaments. Mh. Math, 71:14-23, 1967.

[3]. P. J. Kelly. A congruence theorem for trees. Pacific J. Math, 7:961-968, 1957.

[4]. V. B. Mnukhin. The k-orbit reconstruction and the orbit algebra. Acta Appl. Math, 29(1-2):83-117, 1992.

[5]. M. Pouzet. Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. Math. Zeitschrirt, 150:117-134, 1976.

[6]. M. Pouzet. Relations non reconstructible par leurs restrictions. Journal of combinatorial Theory, Series B}, 26:22-34, 1979.

[7]. M. Pouzet et N. M. Thiéry. Invariants algébriques de graphes et reconstruction. C. R. Acad. Sci. Paris}, 333, Série I:821-826, 2001.

[8]. M. Sghiar, Mesure et action des i-permutations sur les multigraphes multicolores finis et infinis, https://arxiv.org/pdf/1506.08963v2.pdf, Pages 1-41, 2015.

[9]. P. K. Stockmeyer. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments. J. Graph Theory, 1:19-25, 1977.

[10]. S. M. Ulam. A collection of mathematical problems, Interscience, New York}, 1960.

Mohamed Sghiar. " La (-1)-reconstruction des graphes symétriques à au moins 3 éléments." *IOSR Journal of Computer Engineering (IOSR-JCE),* 22(3), 2020, pp. 13-16.